

Devoir commun

La calculatrice est autorisée

Le barème est donné à titre indicatif.

Durée : 2h00

Exercice 1 : Variations de fonctions, suites (24 points)

Partie A : étude de fonctions

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2+3}$$

1. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$, puis interpréter graphiquement ces résultats.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \frac{-x^2 - 2x + 3}{(x^2 + 3)^2}$$

puis dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

3. Dans ce qui suit, on souhaite résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = x$.

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = x^3 + 2x - 1$$

- (a) Montrer que l'équation $f(x) = x$ équivaut à $g(x) = 0$.
- (b) Déterminer les limites de g en $-\infty$ et $+\infty$.
- (c) Dresser le tableau de variations de g sur $\mathbb{R}$.
- (d) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$, notée α , puis justifier que $0,4 < \alpha < 0,5$.

Partie B : étude d'une suite

On considère la suite U définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$U_0 = -1 \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = f(U_n) = \frac{U_n + 1}{U_n^2 + 3}$$

où f est la fonction étudiée dans la partie A.

1. Déterminer les valeurs de U_1 et U_2 .
2. (a) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-3 < U_n < U_{n+1} < 1$.
(b) En déduire que U est convergente.
(c) Démontrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \alpha$, où α est l'unique solution dans $\mathbb{R}$ de l'équation $f(x) = x$ étudiée à la partie A.

Exercice 2 : Fonctions et convexité (16 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \exp(-2x^2 + 2x)$$

On admet que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, et on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère.

1. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$, puis interpréter graphiquement ces résultats.
2. (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = (-4x + 2) \exp(-2x^2 + 2x)$$

- (b) Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

3. (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f''(x) = 16x(x - 1) \exp(-2x^2 + 2x)$$

- (b) Étudier la convexité de f sur $\mathbb{R}$.

- (c) Préciser, en justifiant, le nombre et les coordonnées des éventuels points d'inflexion.

4. Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.

5. Justifier que

- (a) pour tout $x \leq 0$, $\exp(-2x^2 + 2x) \geq 2x + 1$

- (b) pour tout $x \geq 0$, $\exp(-2x^2 + 2x) \leq 2x + 1$